"بسم ا لله الرحمـــن الرحـــيم "

الغرض من هذه الرساله يتعلق بالضرب الصليبى R * G للزمرة G التى فى الغالب تكون دائرية التعدد بزمرة محددة (polycyclic-by-finite) وعلى وجه التحديد الزمرة المتعددة الرؤوس اللانهائية على حلقة .

إن أهمية هذا الموضوع ليس فقط التقاء لنظرية الزمرة group theory ونظرية الحلقة ring theory ولكن تعميم للعديد من التركيبات الجبرية الهامة مثل حلقات الزمرة (group ring) وحلقات الزمرة المنحرفة وحلقات الزمرة الملتوية .

حديثا حدث أهتمام فى الدراسة النظرية للحلقة فى الضرب الصليبى وعلى وجه الخصوص حلقات الزمرة المنحرفة للزمر المحدودة وهذا ناتج عن علاقته مبنظرية جالوا (Galois theory) بالنسبة للحلقة مثلا يوجد روابط قوية بين حلقة زمرة منحرفة RG وتحت حلقة جزئية ثابته R^G . وفى الحقيقة بالنسبة لاغلب التركيبات المناسبة تكون هاتان الحلقتان متكافئتين بمعنى موريتا . هذه الموضوعات بالتفصيل سوف تناقش فيما بعد ، علاوة على ذلك فإن الضرب الصليبى يكون وثيق الصلة بدراسة جبريات القسمه محددة البعد (Finite dimensional division algebras) والجبريات المركزية البسيطة (Center simple algebras) وزمر براور لهم (Brauer groups) وحلقات الزمرة المتدرجة .

تستند نظرية الجبريات البسيطة المركزية على حقيقة أن كل جبرية من هذا النوع متشابه لجبرية الضرب الصليبى على نفس الحقل أو الحلقة الابدالية K، أو بمعنى آخر تنطبق هاتان الجبريتان (تنتمى الى نفس الفصل) فى زمرة براور التى تكون عناصرها فصول لجبريات بسيطة مركزية تحتوى على نفس الحقل الجزئى الأعظم .

فى الواقع أن الضرب الصليبى لحقل مع زمرة جالوا التابعة له يكون جبرية مركزية بسيطة تطرح سؤالا مهم : متى تكون المركزية البسيطة ضرب صليبى ؟ (وليست مجرد مشابه لها) من المعروف أن هذا السؤال : يكافى السؤال متى يكون الحقل الجزئى الأعظم للجبرية المركزية البسيطة أمتداد عمودى للمركز K. مثلا لوكانت الجبرية دائرية فإن أجابه السؤال تكون بالايجاب علاوة على أن هذا فقد أثبت جبريات القسمه المركزية من الدرجة ٢،٣،٤،٦،١٢ تكون ضرب صليبى . ومع ذلك فى ١٩٧٢ اعطى أميشسور (Amitsur) أمثله لجبريات قسمه مركزية محدودة البعد لاتكون ضرب صليبى (Crossed product) يوجد عدة أسباب لأن نركز فى هذه الرسالة على ما تسمى

بالجبريات من النوع E بمعنى الضرب الصليبى الدائرى اللانهائى أو الضرب الصليبى المتعدد الرؤوس اللانهائى .

أحد هذه الأسباب أنه لأى زمرة فائقة القابلية للحل لها صورة تشاكلية تكون أحد الزمرتين السابقتين السبب الآخر وربما السبب الفعال فى هذه الرسالة أن تركيب التشكيلات المحدودة التوليد (structure of finitely generated Modules) على جبرية الزمرة KG للزمرة G التى تحتوى على زمرة دائرية لانهاية ذات دليل محدود يؤدى الى دراسة المصفوفات على جبريات من النوع E.

هذه الرسالة تحتوى على ٦ أبواب :-

الباب الصفرى : يحتوى على التعرفات الأساسية والمصطلاحات العلمية المستخدمة فى الرسالة .

البال الأول : دراسة الضرب الصليبى من أتجاهات مختلفة وأظهار العلاقات بين جبريات مركزية بسيطة وزمر براور.

الباب الثانى : يعطى عرض مختصر عن النتائج السابقة وأن أى زمرة تحتوى على زمرة جزئية دائرية لانهاية ذات دليل محدود أو اللانهاية فائقة القابلية للحل (infinite supersolvable group) يمكن تحويلها الى زمرة دائرية لانهاية أو زمرة لانهاية ذات رؤوس متعددة كذلك قدمنا النظرية التركيبية لتشكيلات محددة التوليد KG لمثل هذه الزمره G وأظهرنا أنها تساوى الجمع المباشر للمصفوفات على جبريات من النوع E.

ونظريات هذا الباب مؤخوذه من نتائج العالمين برمان وبوزاشى (Berman, Buzasi)

الباب الثالث : يعطى بالتفصيل كل الجبريات من النوع E على حقل محدود ويوضح فى هذا الباب أنه يوجد بالضبط (من وجه نظر التماثل) (upto isomorphism) ثمانية أنواع التى يرمز لها ب A_1.....A_8.

الباب الرابع : يدرس تحقيق لجبريات من النوع E وبالتحديد نبين أن لكل واحدة من الجبريات A_i.

يوجد زمرة G_i بحيث أن A_i تماثل مثالى (أساس) فى جبريه الزمرة KG_i.

الباب الخامس : يحتوى على ١١ جزء و كل جزء يبحث صفة جبرية مهمة أو أكثر ويختبر وجودها فى كل نوع A_i مثلا

فى الجزء ٥:١ نعرض أن الجبريات من النوع E على حلقات نيوثرية (over Noetherian rings) تكون نيوثرية وجبريات جاكوبسون (Jacobson algebres).

فى الجزء ٥: ٢ نبين أن الجبريات من النوع E تكون أولية (prime) وشبه بدائية (semi primitive) كذلك نوضح أن كل مثالى (ideal) فى هذه الجبرية كسرى.

وفى الجزء ٥:٣ نظهر أن الجبريات من النوع E تحقق متطابقة كثيرة الحدود وبالتالى استنتجنا كثير من الصفات الجبرية المتحققة فى هذه الجبريات. واحدة من هذه الصفات هى أن الجبريات من النوع E تكون محدودة تماما (FBN).

وفى الجزئين ٥:٤، ٥:٥ درسنا الأبعاد المختلفة للجبريات من النوع E. برهنا أن بعد كرول التقليدى (the classical Krull dimension) وبعد كرول الغيرتقليدى (the non classical Krull dimension) وكذلك بعد الخارج (Global dimension) جميعها يساوى الواحد وكذلك استنتجنا أن الجبريات من النوع E تكون وراثية (Hereditary) ولكن لاتكون أرتينية (Artinian)ولا فويمان المنتظمة (von-Neumann regular) .

فى الجزء ٥:٧ نتناول دراسة البدائية والبساطة للجبريات من نوع E واستنتجنا باستعمال تقنيات مختلفة أن الجبريات A_8 ,A_7 ,A_2 تكون بسيطة وهذا يكافئ انها مبدئية بينما باقى الجبريات من النوع E ليست كذلك .

الجزء ٥:٨ يدرس (قابلية القسمه للصفر والمحلية) وشروط اورى (Zero divisibility locality and Ore conditions) نبين أن كل الجبريات من النوع E ما عدا A_1,A_2 تحتوى على قواسم صفرية استنتجنا أن الجبريات A_8,A_7,A_6,A_4,A_3 تكون ليست محلية كذلك بينا أن الجبريات A_1,A_2, A_7,A_3 تكون حلقات اورى (Ore rings).

الجزء ٥:٩ يدرس اساسية المثاليات فى الجبريات من النوع E على الرغم من دراسة هذه الخاصية المهمة كانت واحدة من أهداف هذه الرسالة. نعتقد أن نتائج هذا الجزء كاملة. علاوة على ذلك تمكنا من أظهار أن الجبريات A_5,A_2,A_1 مع شرط خاص أن ($b^2 = -1$) تكون حلقات مثاليات أساسية .(الحالة الأخيرة ترجع الى (P.Pálfy) بينما الجبرية A_3لاتكون .

الجزء ٥:١٠ بحثنا خاصية أكثر عمومية ومرتبطة بخاصية حلقة المثاليات الأساسية وبالتحديد بحال التحليل الوحيد(Unique factorisation domain) وبينا أن الجبرية A_3 لاتكون بحال وحيد التحليل (UFD) وهذا يؤكد نتائج الجزء ٥:٩.

أخير في الجزء ٥:١١ درسنا زمره جرو ثيندیك (Grothendieck group) لجبريات نوع E.

بينا أن زمرة جروثيندیك A_8.....A_5 تتماثل مع حاصل ضرب ثلاث نسخ من حلقة الأعداد الصحيحة $Z^3 \approx A_8$.....A_5 وزمرة الجروثيندیك A_1 تتماثل مع الاعداد الصحيحة Z

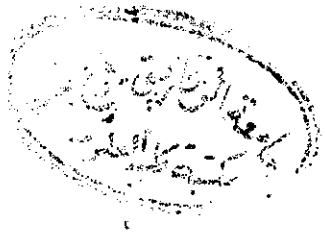
$$A_1 \approx Z$$

نتائج الفصل الثالث والرابع نشرت فى المرجع (٢) والمرجع (٣) بينما نتائج الفصل الخامس تحت الأعداد للنشر فى المرجع (٤).

١٠٤

المثاليات الأساسية فى حاصل الضرب الصليبى

رسالة



مقدمة الى كلية العلوم – فرع بنها – جامعة الزقازيق

للحصول على

درجة دكتوراه الفلسفة فى العلوم فى الرياضيات البحتة

من

زينب محمد عبد المنعم عبد الرحمن

الأستاذ الدكتور/ محمد حسين فهمى
أستاذ الرياضيات –كلية العلوم
جامعة الأزهر

الأستاذ الدكتور / فاروق محمد البتانونى
أستاذ الرياضيات – كلية العلوم
فرع بنها – جامعة الزقازيق

كلية العلوم – فرع بنها – جامعة الزقازيق

(١٩٩٥)